ISSN : 2656-7172 Vol. 5 No. 1 (April, 2023)

SOME PROPERTIES OF PRIME MODULES AND SEMIPRIME MODULES

Mega Puspitorini[1]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Palangka Raya

Email: megapuspitorini@mipa.upr.ac.id

ABSTRACT

Prime modules was introduced by Feller and Swokowski. In J. Dauns did a research about generalization of prime modules and defined semiprime modules as weaker terms of prime modules. In other hand, Abu-Saymeh studied characteristic ring of prime modules. Furthermore Behboodi, Karamzadeh, and Koohy defined fully prime (semiprime) modules. Necessary and sufficient conditions for those type of modules was also given. In this articles, we will discuss the result of Behboodi, et al. those are necessary and sufficient condition for fully prime (semiprime) modules. Then the relation between prime modules and semiprime modules is studied. At the end, we will prove a new theorem about necessary and sufficient conditions for semiprime modules to be a prime modules with added some condition to semiprime modules's annihilator.
Keywords : prime modules, semiprime modules, and fully prime (semiprime) modules

---

PENDAHULUAN

Seluruh gelanggang pada pembahasan ini adalah gelanggang komutatif dengan unsur satuan dan seluruh modul M atas R adalah modul uniter. Suatu submodul sejati pada modul atas gelanggang komutatif dengan identitas, disebut submodul prima jika memenuhi untuk setiap perkalian dari gelanggang dan modul yang hasilnya merupakan unsur di submodul, maka mengakibatkan unsur di modul tersebut merupakan unsur di submodul, atau perkalian dari gelanggang dengan setiap unsur di modul menghasilkan subhimpunan di submodul tersebut. Suatu modul $M \neq 0$ disebut modul prima jika submodul nolnya adalah submodul prima. Definisi ini pertama kali di perkenalkan oleh (Feller & Swokowski, 1965). Kemudian pada (Dauns, 1978) memperumum definisi dari submodul prima dan juga mendefinsikan submodul semiprima sebagai perlemahan dari submodul prima.

Suatu submodul prima (semiprima) juga dapat dilihat sebagai suatu ideal prima (semiprima). Pada (Abu-Saymeh, 1995) tertarik untuk mengkaji tumpuan dari submodul prima (semiprima) dengan menambahkan syarat pada tumpuan agar modul tersebut memiliki submodul prima (semiprima).

Kemudian pada (Behboodi et al., 2004) mendefiniskan modul prima (semiprima) penuh jika semua submodulnya adalah submodul prima (semiprima). Pada (Behboodi et al., 2004) juga memberikan sifat-sifat yang terkait pada kedua jenis modul tersebut. Serta syarat perlu dan cukup bagi modul prima untuk menjadi modul prima penuh.

Pada artikel ini dikaji kembali hasil-hasil yang telah diperoleh oleh (Behboodi et al., 2004), dengan alur yang berbeda. Pada (Behboodi et al., 2004), jelas suatu modul prima merupakan modul semiprima, tetapi modul semiprima belum tentu modul prima. Hal ini menjadi menarik untuk dikaji lebih lanjut. Sehingga pada artikel ini dibahas mengenai syarat perlu dan cukup bagi modul semiprima agar menjadi modul prima yang ditinjau dari karakteristik pemusnahnya (Teorema 27).

METODE

(Behboodi et al., 2004) pertama kali memperkenalkan definisi dari submodul prima (semiprima), modul prima (semiprima), dan modul prima (semiprima) penuh. Pada artikel ini dikaji kembali dan diberikan pula contoh dan sifat dari keempat jenis modul tersebut. Dibahas pula beberapa kesetaraan definisi dari modul prima dan modul semiprima yang merupakan landasan dari permbahasan pada artikel ini.

Berikut diberikan definisi dari modul prima, contoh dari modul prima, kesetaraan dari modul prima serta sifat-sifat dari modul prima. Tetapi sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi dari submodul prima.

Definisi 1. (Behboodi et al., 2004) Misalkan M modul atas R dan N submodul sejati di M. Submodul N disebut submodul prima jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm \in N$ maka $m \in N$ atau $rM \subseteq N$.

Definisi 2. (Behboodi et al., 2004) Misalkan $M \neq 0$ modul atas R. Modul M disebut modul prima jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm = 0_M$ maka $m = 0_M$ atau $r \in Ann(M)$.

Contoh 3. Modul $\mathbb{Q}$ atas gelanggang $\mathbb{Z}$.

Lema 4. Modul $M \neq 0$ atas R adalah modul prima jika dan hanya jika submodul $\{0_M\}$ di M adalah submodul prima di M.
Bukti.
($\Rightarrow$) Misalkan $M \neq 0$ modul atas R adalah modul prima. Ambil submodul $\{0_M\}$ di M dan ambil $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm = 0_M$. Karena M adalah modul prima maka $m = 0_M$ atau $r \in Ann(M)$ ini berarti $rM = 0_M$ sehingga $rM \subseteq \{0_M\}$. Akibatnya $\{0_M\}$ adalah submodul prima di M.
($\Leftarrow$) Misalkan submodul $\{0_M\}$ di M adalah submodul prima di M. Ambil $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm = 0_M$. Karena $\{0_M\}$ di M adalah submodul prima maka $m = 0_M$ atau $rM \subseteq \{0_M\}$ sehingga $rM = 0_M$ atau $rM = \emptyset$. Jelas $rM \neq \emptyset$ akibatnya $rM = 0_M$ dan $r \in Ann(M)$. Jadi M adalah modul prima. ■

Proposisi 5. Modul $M \neq 0$ atas R adalah modul prima jika dan hanya jika $Ann(m) = Ann(M)$ untuk setiap $m \in M$.

Lema 6. Modul $M \neq 0$ atas R adalah modul prima jika dan hanya jika setiap suku langsung sejati dari M adalah submodul prima.

Teorema 7. Pemusnah dari suatu modul prima M atas R adalah ideal prima.

Teorema 8. Jika modul M atas R adalah modul sederhana maka $Ann(m) = Ann(M)$ untuk setiap $m \neq 0 \in M$.

Diberikan definisi tentang modul prima penuh beserta contoh dan sifat-sifat yang terkait.

Definisi 9. (Behboodi et al., 2004) Misalkan M modul atas R. Modul M disebut modul prima penuh jika setiap submodul sejati di M adalah submodul prima.

Contoh 10. Modul $\mathbb{Z}_p$ dengan p prima atas gelanggang $\mathbb{Z}$.

Lema 11. Jika modul M atas R adalah modul prima penuh maka M adalah modul prima.
Bukti.
Misalkan M atas R adalah modul prima penuh. Dibuktikan M adalah modul prima. Karena M adalah modul prima penuh maka setiap submodul sejati di M adalah submodul prima. Akibatnya submodul $\{0_M\}$ di M adalah submodul prima. Sehingga menurut Lema 4 modul M adalah modul prima. ■

Menurut Lema 11 diketahui bahwa modul prima penuh merupakan modul prima. Tetapi pernyataan tersebut tidak berlaku sebaliknya. Selanjutnya diberikan teorema yang menambahkan syarat pada modul prima agar menjadi modul prima penuh

Teorema 12. Misalkan $M \neq 0$ modul atas R. Pernyataan berikut ekuivalen

1. M modul prima dan semisederhana
2. M modul prima penuh
3. modul semisederhana homogen.

Selanjutnya diperkenalkan definisi modul semiprima dan modul semiprima penuh. Selain itu, diberikan pula contoh, dan sifat dari kedua jenis modul tersebut dan beberapa definisi yang setara dari modul semiprima.

Berikut diberikan definisi dari modul semiprima, contoh dari modul semiprima, kesetaraan dari modul semiprima serta sifat-sifat dari modul semiprima. Tetapi sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi dari submodul semiprima.

Definisi 13. (Behboodi et al., 2004) Misalkan M modul atas R dan N submodul sejati di M. Submodul N disebut submodul semiprima jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r^2m \in N$ maka $rm \in N$.

Definisi 14. (Behboodi et al., 2004) Misalkan $M \neq 0$ modul atas R. Modul M disebut modul semiprima jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r^2m = 0_M$ maka $rm = 0_M$.

Contoh 15. Modul $\mathbb{Q}$ atas gelanggang $\mathbb{Z}$.

Teorema 16. Misalkan M modul atas R dan N submodul sejati di M. Submodul N adalah submodul semiprima jika dan hanya jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r^km \in N$ maka $rm \in N$ untuk setiap $k \in N$.

Lema 17. Modul $M \neq 0$ atas R adalah modul semiprima jika dan hanya jika submodul $\{0_M\}$ di M adalah submodul semiprima di M.
Bukti.
($\Rightarrow$) Misalkan $M \neq 0$ modul atas R adalah modul semiprima. Ambil submodul $\{0_M\}$ di M dan ambil $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r^2m = 0_M$. Karena M adalah modul semiprima maka $rm = 0_M$ ini berarti $r(rm) = 0_M$ sehingga $rm \in 0_M$. Akibatnya 0_M adalah submodul semiprima di M.
($\Leftarrow$) Misalkan submodul $\{0_M\}$ di M adalah submodul semiprima di M. Ambil $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r^2m = 0_M$. Karena $\{0_M\}$ di M adalah submodul semiprima maka $rm \in \{0_M\}$. Akibatnya $r(rm) = 0_M$ sehingga $rm = 0_M$. Jadi M adalah modul semiprima. ■

Teorema 18. Modul M atas R adalah modul semiprima jika dan hanya jika untuk setiap $0 \neq m \in M$, $Ann(m)$ adalah ideal semiprima.

Diberikan definisi tentang modul semiprima penuh beserta contoh dan sifat-sifat yang terkait.

Definsi 19. (Behboodi et al., 2004) Misalkan M modul atas R. Modul M disebut modul semiprima penuh jika setiap submodul sejati di M adalah submodul semiprima.

Contoh 20. Modul $\mathbb{Z}_p$ dengan p prima atas gelanggang $\mathbb{Z}$.

Lema 21. Jika modul M atas R adalah modul semiprima penuh maka M adalah modul semiprima.
Bukti.
Misalkan M atas R adalah modul semiprima penuh. Dibuktikan M adalah modul semiprima. Karena M adalah modul semiprima penuh maka setiap submodul sejati di M adalah submodul semiprima. Akibatnya submodul $\{0_M\}$ di M adalah submodul semiprima. Sehingga menurut Lema 17 modul M adalah modul semiprima. ■

Menurut Lema 21 diketahui bahwa modul semiprima penuh merupakan modul semiprima. Tetapi pernyataan tersebut tidak berlaku sebaliknya. Berikut diberikan contoh penyangkal untuk pernyataan tersebut.

Contoh 22. Diberikan modul $M = \mathbb{Q}$ atas gelanggang $R = \mathbb{Z}$. Ambil submodul sejati di M yaitu $\mathbb{Z}$ dan submodul $\{0_M\}$ di M. Dibuktikan $\mathbb{Z}$ bukan submodul semiprima di M. Pilih $r = 2 \in R$ dan $m = \frac{1}{4} \in M$ dengan $r^2m = 1 \in Z$. Perhatikan bahwa $rm = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ sehingga $\mathbb{Z}$ bukan submodul semiprima di M. Selanjutnya dibuktikan $\{0_M\}$

adalah submodul semiprima di M. Perhatikan bahwa untuk setiap $r \in \{R\}$ dan $m \in M$ dengan $r^2 m = 0_M$ maka $rm = 0_M$. Akibatnya $\{0_M\}$ adalah submodul semiprima di M.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan Lema yang diberikan sebelumnya, jelas bahwa modul prima adalah modul semiprima, namun belum tentu berlaku sebaliknya. Oleh karena itu menarik untuk diketahui syarat cukup bagi modul semiprima agar menjadi modul prima dengan melihat karakteristik dari pemusnahnya.

Sebelum membahas keterkaitan modul prima dan modul semiprima diberikan terlebih dahulu keterkaitan submodul prima dengan submodul semiprima.

Proposisi 23. Misalkan M modul atas R dan N adalah submodul sejati di M . Jika N adalah submodul prima maka N adalah submodul semiprima.
Bukti.
Misalkan M modul atas R dan N adalah submodul prima di M. Dibuktikan N adalah submodul semiprima. Ambil $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r^2 m \in N$. Karena N adalah submodul prima maka $m \in N$ atau $rM \subseteq N$. Akibatnya $rm \in N$. Jadi N adalah submodul semiprima. ∎

Dari Proposisi 23 diketahui bahwa submodul prima merupakan submodul semiprima. Tetapi pernyataan tersebut tidak berlaku sebaliknya. Berikut diberikan contoh penyangkal untuk pernyataan tersebut.

Contoh 24. Diberikan modul $M = \mathbb{Z}_6$ atas gelanggang $R = \mathbb{Z}$. Ambil submodul $\{\overline{0_M}\}$ di M. Dibuktikan submodul $\{\overline{0_M}\}$ adalah submodul semiprima tetapi bukan submodul prima. Ambil $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r^2 m = 0_M$ maka berlaku $rm = 0_M$ sehingga $\{\overline{0_M}\}$ adalah submodul semiprima. Tetapi submodul $\{\overline{0_M}\}$ bukan submodul prima. Jadi submodul $\{\overline{0_M}\}$ adalah submodul semiprima yang bukan submodul prima.
Selanjutnya dibahas mengenai keterkaitan modul prima dan modul semiprima.

Proposisi 25. Jika M modul atas R adalah modul prima maka M adalah modul semiprima.
Bukti.
Misalkan M modul atas R adalah modul prima. Dibuktikan M adalah modul semiprima. Ambil $r \in R\ dan\ m \in M$ dengan $r^2 m = 0_M$. Karena M adalah modul prima maka $m = 0_M$ atau $r^2 \in Ann(M)$.

- Jika $m = 0_M$ maka $rm = 0_M$.
- Jika $r^2 \in Ann(M)$ dan karena menurut Teorema 7 $Ann(M)$ adalah ideal prima maka $r \in Ann(M)$ sehingga $rm = 0_M$.

Jadi M adalah modul semiprima. ∎

Dari Proposisi 25 diketahui bahwa modul prima merupakan modul semiprima. Tetapi pernyataan tersebut tidak berlaku sebaliknya. Berikut diberikan contoh penyangkal untuk pernyataan tersebut.

Contoh 26. Diberikan modul $M = \mathbb{Z}_6$ atas gelanggang $R = \mathbb{Z}$. Dibuktikan M adalah modul semiprima tetapi bukan modul prima. Menurut Lema 4 dan Lema 17 cukup diperhatikan submodul $\{\overline{0_M}\}$ di M. Perhatikan bahwa submodul $\{\overline{0_M}\}$ adalah submodul semiprima tetapi bukan submodul prima. Jadi M adalah modul semiprima tetapi bukan modul prima.

Selanjutnya diberikan teorema yang menambahkan syarat pada modul semiprima agar menjadi modul prima.

Teorema 27. Jika $M \neq 0_M$ modul atas R adalah modul semiprima dan $Ann(m)$ adalah nil ideal untuk setiap $m \in M$ maka M adalah modul prima.
Bukti.
Misalkan M modul semiprima dan $Ann(m)$ adalah nil ideal untuk setiap $m \in M$. Ambil $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rm = 0_M$ dibuktikan bahwa $m = 0_M$ atau $r \in Ann(M)$. Jika $m \neq 0_M$, perhatikan bahwa modul M adalah modul semiprima maka menurut Teorema 16 untuk setiap $r \in R$, $m \in M$ dan $k \in N$ dengan $r^k m = 0_M$ mengakibatkan $rm = 0_M$. Ini berarti jika $r^k \in Ann(m)$ maka mengakibatkan $r \in Ann(m)$ dengan $k \in N$.

Perhatikan bahwa $r^k \in Ann(m)$ dan karena $Ann(m)$ adalah nil ideal maka terdapat $n \in N$ sehingga $\left(r^k\right)^n = r^{kn} = r^s = 0_M$ untuk suatu $s \in N$. Akibatnya $r^s \in Ann(M)$ dan karena M semiprima maka menurut Teorema 18 $Ann(M)$ adalah ideal semiprima sehingga $r \in Ann(M)$. Jadi M adalah modul prima. ∎

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan yaitu suatu modul prima atas gelanggang komutatif merupakan modul semiprima. Tetapi pernyataan ini tidak berlaku sebaliknya. Suatu modul semiprima dapat menjadi modul prima jika pemusnah dari setiap elemen di modul tersebut adalah nil ideal. Sehingga jika suatu modul semiprima yang pemusnahnya merupakan nil ideal, maka jelas modul tersebut adalah modul prima.

DAFTAR PUSTAKA

Abu-Saymeh, S. (1995). On Dimensions of Finitely Generated Modules. *Communications in Algebra*. https://doi.org/10.1080/00927879508825270

Behboodi, M., Karamzadeh, O. A. S., & Koohy, H. (2004). Modules whose certain submodules are prime. *Vietnam Journal of Mathematics*, *32*(3), 303–317.

Behboodi, M., Shojaee, S.H. (2012): Commutative local rings whose ideals are direct sums of cyclics

Dauns, J. (1978). Prime modules. *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik*. https://doi.org/10.1515/crll.1978.298.156

Dummit, D. S. (2004): Abstract Algebra (3rd ed.), John Wiley and Sons.

Feller, E. H., & Swokowski, E. W. (1965). Prime Modules. *Canadian Journal of Mathematics*. https://doi.org/10.4153/cjm-1965-099-5

F. Raggi, J. Rios, H. Rincon, R. Fernandez-Alonso, and C. Signoret, Prime and irreducible preradicals, *J. Algebra Appl*. 4 (2005), no. 4, 451-466

F. Raggi, J. Rios, H. Rincon, R. Fernandez-Alonso, and C. Signoret, Semiprime preradicals, *Comm. Algebra* 37 (2009*)*, no. 8, 2811-2822.

Jacobson, N. (1943): The Teory of Rings, *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society.

Khashan, H.A. (2012): On almost prime submodules, *Acta Mathematica Scientia*, 32(2); 645-651

Lam, T. Y. (1991): A First Course in Noncommutative Rings, *Graduate Texts in Mathematic*s, 131. Springer-Verlag, 31-37

M. Medina-Barcenas and A. C. Ozcan, Primitive submodules, co-semisimple and regular modules, *Taiwanese J. Math.* 22 (2018), no. 3, 545-565

R. Wisbauer, Foundations of module and ring theory, revised and translated from the 1988 German edition, *Algebra, Logic and Applications*, 3, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA, 1991

R. Wisbauer, Modules and algebras: bimodule structure and group actions on algebras, *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, 81, Longman, Harlow, 1996.

Tavallaee, H.A., Varmazyar, R. (2008): Semi-radicals of submodules in modules, IUST International Journal of Engineering Science, 19(1); 21-27